

تحليل الاهتزاز الحر للجسور الصندوقية المنحنية بطريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي

زينة عادل محمد
مدرس مساعد

أياد امجد عبد الرزاق
أستاذ مساعد

جامعة الموصل / قسم الهندسة المدنية

الخلاصة

طورت شريحة قشرية ذات نسق عالي وشكل مخروطي ناقص لتحليل الاهتزاز الحر للجسور الصندوقية المنحنية، استعمل الخط العقدي المساعد في الاشتقاق، وطبقت معادلة الحركة بتكوين مصفوفة الجساءة ومصفوفة الكتلة المتجانسة للشريحة التي تم اشتقاقها رياضياً بحل معادلات من الدرجة السادسة والثالثة الخاصة بأفعال الانحناء والأفعال ضمن المستوي، فضلاً عن ذلك تم تطبيق معادلات تكثيف كويان لكل من مصفوفة الجساءة والكتلة للجسر، لاختزال درجة حرية الحركة للخط العقدي المساعد للشريحة المحددة ذات النسق العالي لتحويل حجم المصفوفة من (15×15) إلى (8×8) .

أعطت الدراسة الحالية مقارنة مع الدراسات السابقة نتائج جيدة جداً للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الأول لمقطع الجسر الصندوقي المؤلف من خليتين صندوقين ذات وترات مائلة إذ وصلت نسبة الفرق ما بين الدراسة الحالية والسابقة إلى (6.73%) ، أما بالنسبة للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الثاني لنفس المقطع فقد وصلت نسبة الفرق إلى (3.76%) .

الكلمات الدالة: تحليل الاهتزاز الحر، الجسور الصندوقية المنحنية، الشريحة المحددة ذات النسق العالي.

Free Vibration Analysis Of Curved Box Girder Bridges by Higher Order Finite Strip

Ayad A. Abdul Razzak
Assistant Professor

Zeena A. Mohamma
Assistant Lecturer

Mosul University/ Civil Engineering Department

Abstract

A higher-order conical frustum shell strip for analysis of free vibration of curved box girder bridges is developed, the auxiliary nodal line technique is used in the formation, the application of the motion equation by form the matrices of the stiffness and that of the consist mass of the strip and which has been mathematically derived by solving sixth and third order equations for bending and in plane actions respectively. Guyan reduction technique have been applied for each stiffness and the mass matrices of bridge. The strip which implies minimizing the degrees of freedom of the auxiliary nodal line of the Higher Order Finite Strip in order to reduce the size of the matrix from (15×15) to (8×8) .

The study has come out with very good results compared to the previous studies in terms of the natural frequencies for the first harmonic number of the box girder bridge section which is composed of two box cells with inclined webs. The ratio of difference between the present and previous studies have reached (6.73%) , while the natural frequencies for the second harmonic number of the same box section the ratio is about equal (3.765%) .

Keywords: Box Girder Bridges, Free Vibration Analysis, Higher Order Finite Strip.

قائمة الرموز

خط عقدي إضافي	ANL
عرض الشريحة ذات النسق العالي	b
مصفوفة الانفعال - التشوه	$[B_m]$
الخط الإضافي للشريحة	c
معاملات الازاحات للأفعال ضمن المستوي الواحد بالاتجاه المستعرض	$[C_u]$
معاملات الازاحات للأفعال ضمن المستوي الواحد بالاتجاه الطولي	$[C_v]$
معاملات الازاحات للأفعال الانحنائية	$[C_w]$
مصفوفة الصلادة للأفعال الانحنائية والأفعال ضمن المستوي	$[D]$
المساحة المقطعية	dA
الخواص المقطعية المتعامدة	E_x, E_θ
متجه القوى العقدية الكلي للجسر	$\{F\}$
سمك الشريحة	h
الخطوط الحدودية للشريحة	i, j
مصفوفة الجساءة بالإحداثيات المحلية	$[K]$
العدد التوافقي المتغير	m
مصفوفة الكتلة المتجانسة بالإحداثيات المحلية	$[M_c]$
مصفوفة الكتلة المتجانسة بالإحداثيات الإجمالية	$[\bar{M}_c]$
العدد التوافقي الكلي	n
مصفوفة معاملات دالة الشكل والدالة المتواليه	$[N]$
نصف قطر الشريحة	r
مصفوفة التحويل	$[T]$
التشوه بالاتجاه المستعرض على الخط الإضافي (c)	U_{cm}
التشوه بالاتجاه المستعرض على الخط الحدودي (i)	U_{im}
التشوه بالاتجاه المستعرض على الخط الحدودي (j)	U_{jm}
الطاقة الكامنة الكلية	U_t
ازاحات الأفعال ضمن المستوي الواحد بالاتجاه المستعرض	$\{U^p_m\}$
التشوه بالاتجاه الطولي على الخط الإضافي (c)	V_{cm}
التشوه بالاتجاه الطولي على الخط الحدودي (i)	V_{im}
التشوه بالاتجاه الطولي على الخط الحدودي (j)	V_{jm}
ازاحات الأفعال ضمن المستوي الواحد بالاتجاه الطولي	$\{V^p_m\}$
الهبوط بالاتجاه العمودي على الخط الإضافي (c)	W_{cm}
متجه ازاحات أفعال انحنائية	$\{W^b_m\}$
الهبوط بالاتجاه العمودي على الخط الحدودي (i)	W_{im}
الهبوط بالاتجاه العمودي على الخط الحدودي (j)	W_{jm}
الانفعال بالاتجاه المستعرض على الخط الإضافي (c)	$\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{cm}$
الانفعال بالاتجاه الطولي على الخط الإضافي (c)	$\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)_{cm}$

زاوية انحراف الجسر المنحني أفقياً	α
متجه نزوات الإزاحة للجسر	$\{\delta_m\}$
متجه الانفعالات والتقوس	$\{\varepsilon\}$
زاوية ميل الشريحة عن المحور العمودي	ϕ
التقعر بالاتجاه المستعرض على الخط الإضافي (c)	γ_{cm}
تغير زاوية انحراف الجسر المنحني من 0 إلى α	θ
زاوية دوران بالاتجاه المستعرض على الخط الإضافي (c)	θ_{cm}
زاوية دوران بالاتجاه المستعرض على الخط الحدودي (i)	θ_{im}
زاوية دوران بالاتجاه المستعرض على الخط الحدودي (j)	θ_{jm}
الكثافة الكتلية للشريحة	ρ
متجه الاجهادات والعزوم	$\{\sigma_m\}$
التردد الطبيعي الأول والثاني للجسر	ω_1, ω_2

المقدمة

تعد الجسور من المنشآت واسعة الانتشار عبر تاريخ التوسع العمراني، وأنها من أكثر المنشآت رواجاً واستعمالاً في مجال الهندسة المدنية، وقد استخدمت طرق عديدة لتحليلها منها طريقة الشريحة المحددة التي طبقت أولاً من قبل الباحث [1] Cheung إذ يمثل المنشأ بنقسيمه إلى شرائح طولية تربطها خطوط عقدية لكل منها خواص مادية وهندسية مستقلة وتمتد هذه الشرائح على طول الفضاء وتتغير دالة التشوه فيها تغيراً متوالياً بالاتجاه الطولي وتغيراً متعدد الحدود بالاتجاه العرضي.

أن التحليل الديناميكي أكثر تعقيداً من التحليل السكوني، لأن الاستجابة الديناميكية المتمثلة بالازاحات والاجهادات الناتجة عن الأحمال المسلطة متغيرة مع الزمن ويعد التردد الطبيعي للجسر هو المؤشر الأكثر فعالية في التحليلات الديناميكية مقارنة بالمتغيرات الأخرى، وذلك لأهميته الكبيرة من أجل منع حدوث ظاهرة الرنين، وهذا يحكمنا بضرورة إجراء تحليل الاهتزاز الحر أولاً قبل القيام بتحليل الاهتزاز القسري، وهناك أنواع عدة من الاهتزازات الناتجة عن الأحمال الديناميكية تؤثر بشكل واضح على المنشآت الهندسية منها: الأحمال الصدمية والزلازل واهتزازات الآلات [2].

قدمت أعمال ودراسات لتحليل الاهتزاز الحر للجسور المنحنية فقد كانت هناك محاولات لدراسة تحليل الاهتزاز الحر للجسور المنحنية عام (1966) من قبل الباحثين (Komatsu and Nakai) [3]. وقد استخدم الباحثان (Culver and Oestel) [4]، عام (1969) طريقة (Rayleigh-Ritz) للحصول على قيم الترددات الطبيعية للعتبات المنحنية بسيطة الإسناد بفضاء واحد وبفضاءات متعددة وبينت النتائج أن مقدار أقل تردد طبيعي للجسر المنحني بفضائين أعلى من أقل تردد طبيعي للجسر المستقيم بفضاء واحد، وبين إن نمط الاهتزاز للجسر المنحني بفضائين مشابه للجسر المنحني ذي الفضاء الواحد، وقيمة التردد الأول للعدد التوافقي الأول أقل من التردد الأول للعدد التوافقي الثاني.

وتمكن كل من (Sheikh and Mukhopadhyay) [5]، عام (1993) من إدخال أسلوب جديد لتحليل الاهتزاز الحر للمنشآت الصفائحية المقواة بطريقة (Spline Finite Strip) التي تستخدم مع نماذج الجسور، إذ أعطت الطريقة خطوات لحساب قيم الترددات الطبيعية لمقاطع مختلفة من الصفائح المستطيلة، والمنحرفة والقواطع الدائرية. وأجرى كل من (Huang and Member) [6]، عام (2001) دراسة موسعة حول الاهتزاز الحر للجسور الصندوقية المنحنية بفضاءات متعددة وبمقطع صندوقي مؤلف من خلية منفردة ومحمل بمركبات ثقيلة ومتحركة على طريق خشن، نموذج المركبة من نوع (AASHTO HS-2044 Tractor-Trailer) من صنف ثلاثية المحاور، وتم الحصول على قيم أول أربعة ترددات طبيعية لواحد وعشرين جسراً صندوقياً ذوي أقطار مختلفة، وتم التوصل إلى أن التردد الطبيعي للجسر يتناقص بزيادة نصف القطر.

وقام الباحث (Senthilvasan) وآخرون [7]، عام (2002) بإجراء دراسة عملية لجسر منحني مقسم إلى خليتين، ومحمل بمركبات ثقيلة من صنف خماسية المحاور إذ تم التوصل عملياً على قيم الانفعالات والأود للجسر عند مواقع مختلفة من فضاء الجسر وتحت تأثير سرعة مختلفة للمركبة، كما تم الحصول على قيم عملية للترددات الطبيعية للجسر.

وفي عام (2005) قام الباحثان (Abdul-Razzak and Mohammad) [8]، باستخدام طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي مع تقنية الخط العقدي المساعد لإيجاد تحليل الاهتزاز الحر للجسور الصندوقية المستقيمة، وتم تطبيق الطريقة التكرارية (Subspace Iteration) للحصول على قيم الترددات الطبيعية للجسر، واستخدمت طريقة تكثيف كويان لحذف درجة حرية الحركة للخط العقدي المساعد لمصفوفة الجساءة للتحليل الحر، وتم الحصول على قيم الترددات الطبيعية للعدد التوافقي الأول.

أما محور الدراسة الحالية فقد تم تطبيق طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي مع تقنية الخط العقدي المساعد لكل من الأفعال الانحنائية والمستوية لغرض إجراء تحليل الاهتزاز الحر للجسور المنحنية ذات المقطع الصندوقي باستخدام طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي.

الفرضيات الأساسية للشريحة القشرية المنحنية ذات النسق العالي

الشكل (1) يوضح الشريحة القشرية المخروطية العامة بخط عقدي مساعد واحد (ANL):

استخدمت دالة الإزاحة من المرتبة السادسة لتمثيل التغيرات للأفعال الانحنائية (W^b)، ودالة إزاحة من المرتبة الثالثة لتمثيل التغيرات للأفعال ضمن المستوي الواحد (U^p, V^p) وكما يأتي:

أفعال الانحناء: يمكن التعبير عن دالة الإزاحة للأفعال الانحنائية بالصيغة الآتية [11,10,9]:

$$W^b = \sum_{m=1}^n [C_m] \{W_m^b\} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (1)$$

$$= \sum_{m=1}^n [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7] \{W_m^b\} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} W^b \quad (2)$$

إذ أن:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - 39S^2 + 162S^3 - 267S^4 + 216S^5 - 64S^6 \\ C_2 &= x(1 - 8S + 25S^2 - 38S^3 + 28S^4 - 8S^5) \\ C_3 &= 48S^2 - 224S^3 + 432S^4 - 384S^5 + 128S^6 \\ C_4 &= x(-8S + 32S^2 - 40S^3 + 16S^4) \\ C_5 &= x^2(2 - 12S + 26S^2 - 24S^3 + 8S^4) \\ C_6 &= -9S^2 + 62S^3 - 156S^4 + 168S^5 - 64S^6 \\ C_7 &= x(S - 7S^2 + 18S^3 - 20S^4 + 8S^5) \end{aligned} \quad (3)$$

إذ إن (S) تمثل:

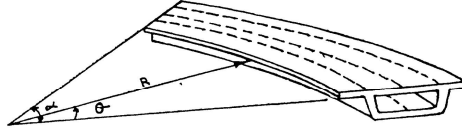
$$S = x / b$$

$$\{W_m^b\} = [W_{im}, \theta_{im}, W_{cm}, \theta_{cm}, \gamma_{cm}, W_{jm}, \theta_{jm}]^T \quad (4)$$

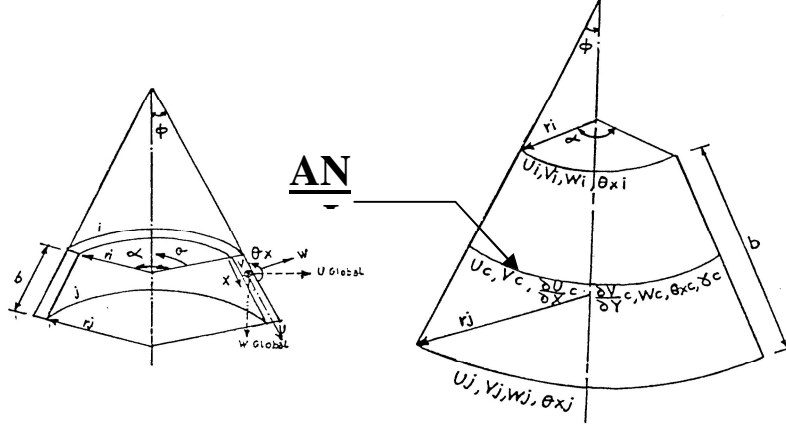
وتمثل القيم ($\gamma_{cm}, W_{cm}, \theta_{cm}$) ذروات كل من زاوية الدوران، والأود والنقوس على التوالي للعدد التوافقي (m) عند الخط العقدي المساعد (ANL).

الأفعال ضمن المستوي الواحد: لتمثيل الإزاحة ضمن المستوي الواحد (V^p, U^p) استخدمت دالة الشكل ثلاثية

الدرجة، التي يمكن التعبير عنها بالمعادلة الآتية [11,10,9]:



تعريف الجسر الصندوقي بالاحداثيات الإجمالية
وتقسيمه إلى شرائح



إحداثيات الشريحة المخروطية المنحنية
المستخدمة في التحليل

درجة حرية الشريحة ذات النسق العالي

الشكل (1): إحداثيات الشريحة المستخدمة في التحليل ودرجة حريتها.

$$U^p = \sum_{m=1}^n [C_u] \{U^p_m\} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (5)$$

إذ أن:-

$$U^p = \sum_{m=1}^n [C_8, C_9, C_{10}, C_{11}] \{U^p_m\} \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (6)$$

$$V^p = \sum_{m=1}^n [C_v] \{V^p_m\} \cos \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (7)$$

إذ أن:-

$$V^p = \sum_{m=1}^n [C_8, C_9, C_{10}, C_{11}] \{V^p_m\} \cos \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (8)$$

$$[C_u] = [C_v]$$

$$C_8 = 1 - 5S + 8S^2 - 4S^3$$

$$C_9 = 4S - 4S^2$$

$$C_{10} = b(-2S + 6S^2 - 4S^3)$$

$$C_{11} = S - 4S^2 + 4S^3$$

(9)

إن درجات حرية الحركة للأفعال ضمن المستوي لمركبات الإزاحة (V^p, U^p) هي كما يلي:

$$\{U^p_m\} = \left[U_{im}, U_{cm}, \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_{cm}, U_{jm} \right]^T \quad (10)$$

$$\{V^p_m\} = \left[V_{im}, V_{cm}, \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{cm}, V_{jm} \right]^T \quad (11)$$

الانفعالات :

إن المعادلات التي تمثل العلاقات بين الإزاحة والانفعال للشريحة المخروطية اشتقت من قبل (Novozhilov) [12]، لكل من أفعال الانحناء والأفعال المستوية وكما يأتي :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ 2\varepsilon_{x\theta} \\ X_x \\ X_\theta \\ 2X_{x\theta} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W \cos \phi + U \sin \phi}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{V \sin \phi}{r} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \\ -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \phi}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial W}{\partial X} \\ 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \theta} + \frac{\sin \phi}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{r^2} V \right) \end{array} \right\} \quad (12)$$

ويمكن تمثيل الانفعال بصيغة مبسطة وكالاتي:

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, 2\varepsilon_{x\theta}, X_x, X_\theta, 2X_{x\theta}]^T \quad (13)$$

$$\{\varepsilon\} = [B_m] \{\delta_m\} \quad (14)$$

إذ إن:

$[B_m]$: مصفوفة الانفعال-الإزاحة.

$\{\delta_m\}$: ذروات الإزاحات العقدية.

$$\{\delta_m\} = \left[U_{im}, V_{im}, W_{im}, \theta_{im}, U_{cm}, V_{cm}, \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)_{cm}, \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)_{cm}, W_{cm}, \theta_{cm}, \gamma_{cm}, U_{jm}, V_{jm}, W_{jm}, \theta_{jm} \right]^T \quad (15)$$

مجموع الاجهادات والعزوم الكلية المقابلة لطاقة الانفعال للشريحة القشرية، للمادة المتعامدة المتباينة الخواص تكون بالصيغة الآتية:

$$\{\sigma_m\} = [\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}, M_x, M_\theta, M_{x\theta}]^T \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_\theta \\ \mathbf{M}_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{K}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{x\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_{x\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ 2\varepsilon_{x\theta} \\ X_x \\ X_\theta \\ 2X_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

يمكن تمثيل المعادلة (17) بصيغة مبسطة بالشكل الآتي :

$$\{\sigma_m\} = \sum_{m=1}^n [\mathbf{D}][\mathbf{B}_m]\{\delta_m\} \quad (18)$$

حيث أن :

$$\mathbf{D}_x = \frac{\mathbf{E}_x h^3}{12(1-\nu_x\nu_\theta)}, \quad \mathbf{D}_2 = \nu_\theta \mathbf{D}_x, \quad \mathbf{D}_{x\theta} = \frac{\mathbf{G}_{x\theta} h^3}{12}, \quad \mathbf{D}_\theta = \frac{\mathbf{E}_\theta h^3}{12(1-\nu_x\nu_\theta)}$$

$$\mathbf{K}_x = \frac{\mathbf{E}_x h}{1-\nu_x\nu_\theta}, \quad \mathbf{K}_2 = \nu_\theta \mathbf{K}_x, \quad \mathbf{K}_{x\theta} = \mathbf{G}_{x\theta} h, \quad \mathbf{K}_\theta = \frac{\mathbf{E}_\theta h}{1-\nu_x\nu_\theta}$$

معادلات الطاقة الكامنة

الطاقة الكامنة الكلية للشريحة المقروية المعرضة إلى حمل (q) هي مجموع طاقة الانفعال الداخلية والطاقة الكامنة للقوى الخارجية المسلطة على المنشأ يمكن التعبير عنها بما يأتي [9]:

$$U_t = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dA - \int_{Aq} q \{\delta\}^T dA \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{\delta_m\}^T \int_0^{\alpha r_j} [\mathbf{B}_n]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}_m]\{\delta_m\} r dr d\theta - \sum_{m=1}^{\infty} \int_{Aq} q \{\delta_m\}^T [\mathbf{C}] r dr d\theta \quad (20)$$

وبسبب خواص دوال الإزاحة المتعامدة فإن النواتج المضاعفة تلغى لحالة ($m \neq n$)، أما عند ($m = n$) فإن مقدار التكامل يصبح:

$$\int_0^{\alpha} \sin^2 \frac{m\pi\theta}{\alpha} d\theta = \int_0^{\alpha} \cos^2 \frac{m\pi\theta}{\alpha} d\theta = \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

بتعويض المعادلة (21) في المعادلة (20) وباختصار التعابير فيما يتعلق بسعة التشوهات يمكن التوصل إلى ما

يأتي:

$$\sum_{m=1}^n \frac{\alpha}{2} \int_{r_i}^{r_j} [\mathbf{B}_n]^T [\mathbf{D}][\mathbf{B}_m]\{\delta_m\} r dr = \sum_{m=1}^n \int_{Aq} q [\mathbf{C}] r dr d\theta \quad (22)$$

وتكون مصفوفة الجساءة للشريحة بحجم (15×15)، للعدد التوافقي m من المعادلة (22) تمثل بالشكل

الآتي:

$$[\mathbf{K}] = \frac{\alpha}{2} \int_{r_i}^{r_j} [\mathbf{B}_m]_{15 \times 6}^T [\mathbf{D}]_{6 \times 6} [\mathbf{B}_m]_{6 \times 15} r dr \quad (23)$$

$$\{\mathbf{F}\} = \int_{Aq} q [\mathbf{C}] r dr d\theta \quad (24)$$

اشتقاق مصفوفة الكتلة المتجانسة

تم استخدام مصفوفة الكتلة المتجانسة للتحليل الديناميكي للجسور بكونها تتعامل مع الأحمال المسلطة الموزعة جميعها كما أنّ الكتلة المتجانسة تتعامل مع الزمن الضمني إذ أنّ التكامل من هذا النوع يعطي نتائج أكثر دقة لاعتمادها على مبادئ الطاقة [13].

إن اشتقاق مصفوفة الكتلة المتجانسة للمنشأ الصندوقي يتم الحصول عليها عن طريق تراكب دوال الشكل لكل من الأفعال الانحنائية والأفعال المستوية، فالإزاحة الافتراضية لأي شريحة قشرية يتم تمثيلها بالصيغة الآتية [14]:

$$\{f\} = \sum_{m=1}^n [N] \{\delta_m\} \quad (25)$$

إذ إن:

$[N]$: دوال استكمال.

$\{f\}$: الإزاحة الافتراضية للشريحة المخروطية.

$\{\delta_m\}$: الذروات الإزاحة كما معرفة بالمعادلة (15).

ويعبر عن المشتقة الثانية لمركبات الخطوط العقدية التي تمثل متجه التعجيل بالصيغة الآتية:

$$\{\ddot{f}\} = \sum_{m=1}^n [N] \{\ddot{\delta}_m\} \quad (26)$$

ويمكن التعبير عن قوى القصور الذاتي للشريحة القشرية كما في المعادلة الآتية:

$$\{\bar{q}\} = \rho \{\ddot{f}\} \quad (27)$$

إذ إن:

ρ : تمثل كتلة وحدة حجم.

إن مقدار القوى العقدية (Nodal Forces) المكافئة لقوى القصور الذاتي للشريحة القشرية تحسب كما في المعادلة الآتية:

$$\{F\} = \int_V [N]^T \{\bar{q}\} dV \quad (28)$$

وطبقاً لمعادلة توازن الحركة للمنشأ فإن القوى العقدية تعرف كما يأتي:

$$\{F\} = [M_c] \{\ddot{\delta}_m\} \quad (29)$$

وبتعويض المعادلة (29) في المعادلة (28) ينتج الآتي:

$$\rho \int_V [N]^T [N] dV \{\ddot{\delta}_m\} = [M_c] \{\ddot{\delta}_m\} \quad (30)$$

إن المعادلة النهائية لمصفوفة الكتلة المتجانسة تكون كما يأتي:

$$[M_c] = \rho h \int_A [N]^T [N] d(\text{area}) \quad (31)$$

h : سمك الشريحة القشرية.

وباستخدام الشريحة القشرية المخروطية ذات النسق العالي (دالة الشكل بالاتجاه العمودي ودالة الشكل بالاتجاه المستوي للانحناء)، فإن مصفوفة $[N]$ تعرف كما يأتي [15,16]:

$$[N] = [C] \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad (32)$$

إذ أن معادلة الكتلة تصبح كالآتي:

$$[M_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{r_i}^{r_j} [C]^T [C] r dr \int_0^{\alpha} \rho h \sin^2 km d\theta \quad (33)$$

إذ إن:

$$km = \frac{m\pi\theta}{\alpha}$$

وبسبب خواص دوال الإزاحة المتعامدة والمذكورة في المعادلة (21) تكون المعادلة الخاصة بالكتلة كما يأتي:

$$[M_c] = \frac{\rho h \alpha^{nj}}{2} \int_{ri} [C]_{15 \times 3}^T [C]_{3 \times 15} r dr \quad (34)$$

وتم الحصول على مصفوفة الكتلة المتجانسة بالحل الرياضي لمعادلات من الدرجة السادسة والثالثة، ثم إجراء التكامل لها ليتم حساب الكتلة للشريحة القشرية المخروطية ذات النسق العالي، وللحصول على الحجم الطبيعي (8×8) للنسق الواطئ لمصفوفة الكتلة ذات النسق العالي يتم عمل تكثيف لمصفوفة الكتلة لحذف درجات الحرية الإضافية للخط العقدي المساعد (ANL) باستخدام طريقة تكثيف كويان (Guyana Reduction) [14]. ولغرض تحويل المصفوفات إلى الإحداثيات الإجمالية يتم تحويل المصفوفة من المحاور المحلية إلى المحاور الإجمالية بموجب العلاقة الآتية:

$$[\bar{M}_c] = [T][M_c][T]^T \quad (35)$$

إذ أن:

$[M_c]$: مصفوفة الكتلة بالإحداثيات المحلية.

$[\bar{M}_c]$: مصفوفة الكتلة بالإحداثيات الإجمالية.

$[T]$: مصفوفة التحويل.

طريقة تكثيف كويان

تم استخدام طريقة تكثيف كويان لغرض حذف درجة حرية الحركة للخط العقدي المساعد لمصفوفة الكتلة ومصفوفة الجساءة عند حساب قيم التردد الطبيعي وأنماط التشوه. إن الحسابات المرتبطة بالديناميك والاهتزاز أكثر تعقيدا من حساب التحليل السكوني إذ إن المنشأ المقسم باستخدام طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي يحتوي على عدد من درجات حرية الحركة الإضافية وذلك بسبب إدخال الخط العقدي المساعد، ويمكن تقليل هذا العدد لدرجات حرية الحركة بواسطة تقنية تكثيف كويان (Guyana Reduction) وتتلخص بالخطوات الآتية [14]:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oi} \\ K^{T_{oi}} & K_{ii} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{oo} & M_{oi} \\ M^{T_{oi}} & M_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (36)$$

K_{oo} : مصفوفة الجساءة للخطوط الحدودية للشريحة.

K_{ii} : مصفوفة الجساءة للخط العقدي المساعد للشريحة.

M_{oo} : مصفوفة الكتلة للخطوط الحدودية للشريحة.

M_{ii} : مصفوفة الكتلة للخط العقدي المساعد للشريحة.

δ_o : متجه الإزاحة عند الخطوط الحدودية للشريحة.

δ_i : متجه الإزاحة عند الخط العقدي المساعد.

إن مقدار الإزاحة للخط العقدي المساعد يتم حسابها بالاعتماد على المعادلة الآتية:

$$\{\delta_i\}_{i \times 1} = -[K_{ii}]_{ii}^{-1} [K_{oi}]_{io}^T \{\delta_o\}_{o \times 1} \quad (37)$$

وقد تم إهمال قيمة مصفوفة الكتلة للشريحة القشرية في المعادلة (37) وذلك لأن قيمتها صغيرة قياسا إلى مقدار مصفوفة الجساءة.

إذ إن:

$$\begin{Bmatrix} \delta_o \\ \delta_i \end{Bmatrix}_{z \times 1} = [T_n]_{z \times o} \{\delta_o\}_{o \times 1} \quad (38)$$

0 : عدد درجات حرية الحركة للخطوط الحدودية للشريحة.

i : عدد درجات حرية الحركة للخط العقدي المساعد.

z : مجموع درجات حرية الحركة (o+i)

$[T_n]$: مصفوفة التدوير والتي تحسب بالشكل الآتي:

$$[T_n] = \begin{bmatrix} I & \\ -K_{ii}^{-1} & K_{oi}^T \end{bmatrix} \quad (39)$$

I : مصفوفة قطرية أحادية.

وبتعويض المعادلة (39) في المعادلة (36) وضربها بالمصفوفة $[T_n]^T$ فإن نظام التكتيف يصبح كالآتي:

$$[K_r]_{o \times o} = [T_n]^T [K]_{z \times z} [T_n] \quad (40)$$

$$[M_r]_{o \times o} = [T_n]^T [M]_{z \times z} [T_n] \quad (41)$$

وبذلك تصبح مصفوفة الجساءة والكتلة النهائية بحجم (8×8) بدلا من (15×15) .

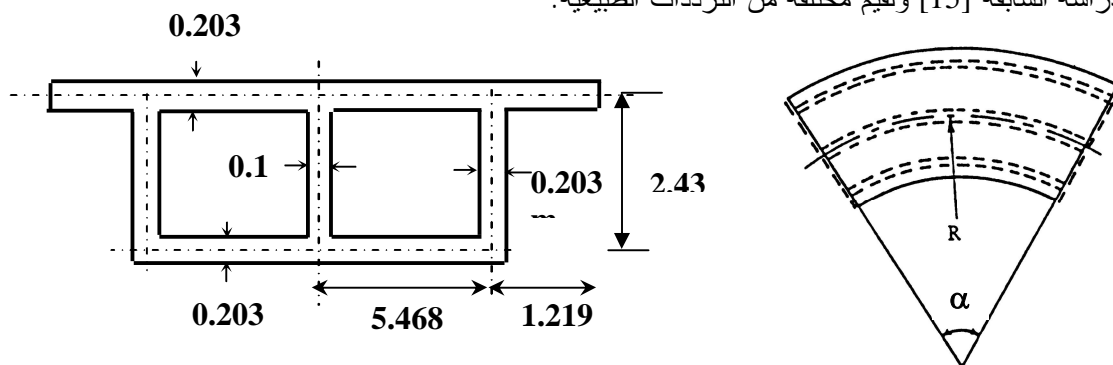
الأمثلة التطبيقية

تم حل ثلاثة أمثلة لجسور صندوقية منحنية بسيطة الإسناد لإجراء تحليل الاهتزاز الحر باستخدام الطريقة التكرارية (Subspace Iteration) وتم الحصول على قيم الترددات الطبيعية بأعداد مختلفة من التوافقية ولأنماط عدة للتشوه.

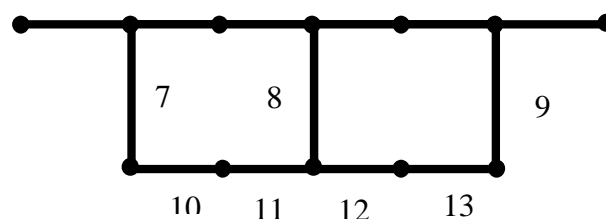
المثال الأول: الاهتزاز الحر لجسر صندوقي منحني مؤلف من خليتين (Bridge-1)

قام كل من (Cheung and Cheung.) [15]، في عام (1972) بتحليل نموذج لجسر صندوقي منحني بسيط الإسناد باستخدام طريقة الشريحة المحددة ذات النسق الواطي، ويمتلك الخواص المادية الآتية: معامل المرونة (N/m^2) 2.1×10^{10} ، الكثافة الكتلية (2400 kg/m^3) ، ونصف قطر (30.48 m) ، ونسبة بواسون (0.16) وبزاوية (1.0 rad) الشكل (2) يبين قيم الأبعاد لنموذج الجسر، وفي عام (1988) استخدم (Lashkari) [17]، طريقة الأجزاء المحددة لتحليل نفس الجسر، كما قام الباحثان (Cheung) and (Li) [18]، في عام (1991) بتحليل الجسر نفسه بطريقة (Spline Finite Strip).

وقد تم في الدراسة الحالية تقسيم المقطع الصندوقي إلى (13) شريحة محددة ذات النسق العالي كما مبين في الشكل (3)، ويوضح الجدول (1) قيم الترددات الطبيعية لجسر صندوقي منحني مؤلف من خليتين، والأشكال من (4) إلى (7) توضح مقارنة بين النتائج المستحصلة للترددات الطبيعية للأعداد التوافقية الأربعة الأولى وبخمس أنماط للتشوه لكل عدد توافقي، ومن خلال هذه الأشكال يلاحظ التوافق الجيد للنتائج التي تم الحصول عليها من الدراسة الحالية مع نتائج المصدر [15] ومن هذا القول إن الشريحة المحددة ذات النسق العالي أعطت نتائج جيدة جدا" وباستخدام (13) شريحة محددة فقط بينما في تحليل المصدر [15] تم التحليل باستخدام (18) شريحة محددة من النسق الواطي. والأشكال من (8) إلى (10) توضح مقارنة الشكل النمطي (Mode Shapes) في المقطع العرضي للجسر بين الدراسة الحالية والدراسة السابقة [15] ولقيم مختلفة من الترددات الطبيعية.



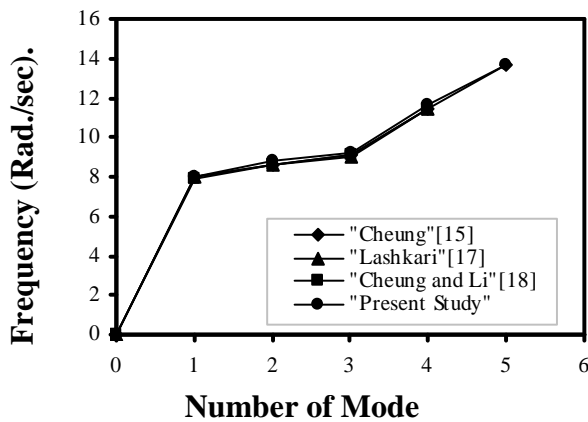
الشكل (2): الأبعاد للجسر الصندوقي المنحني (Bridge-1)



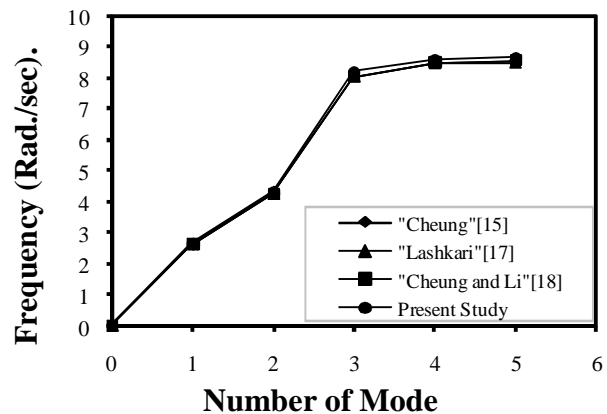
الشكل (3): تقسيم المقطع الصندوقي (Bridge-1) إلى شرائح

الجدول (1) يوضح قيم الترددات الطبيعية لجسر صندوقي منحني مؤلف من خليتين (Bridge-1)

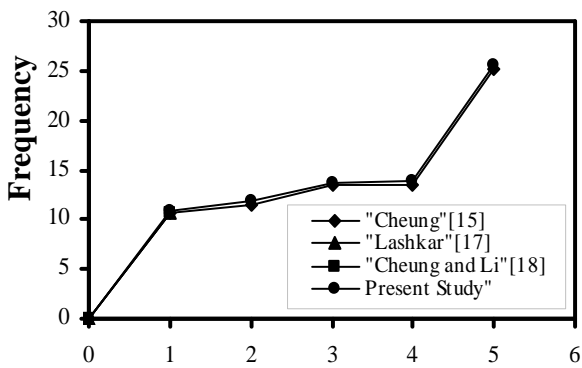
No. of Harmonic	Circular Frequency (Rad./sec.) $\times 10^{-3}$	Cheung and Cheung [15]	Lashkari [17]	Cheung and Li[18]	Present Study
m=1	ω_1	2.623	2.616	2.62	2.64
	ω_2	4.252	4.251	4.249	4.293
	ω_3	8.064	8.037	8.066	8.204
	ω_4	8.501	8.471	8.501	8.589
	ω_5	8.554	8.49	8.553	8.65
m=2	ω_1	8.002	8.002	7.945	8.03
	ω_2	8.605	8.603	8.605	8.763
	ω_3	9.107	9.017	9.107	9.2311
	ω_4	11.427	11.43	11.427	11.645
	ω_5	13.644			13.65
m=3	ω_1	9.436	9.436	9.436	9.625
	ω_2	10.257	10.257	10.257	10.432
	ω_3	11.821			12.011
	ω_4	12.246			12.509
	ω_5	20.046			20.34
m=4	ω_1	10.608	10.608	10.608	10.83
	ω_2	11.556			11.78
	ω_3	13.49			13.67
	ω_4	13.523			13.8
	ω_5	25.243			25.54



الشكل (5): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي للمعدد التوافقي الثاني (Bridge-1)

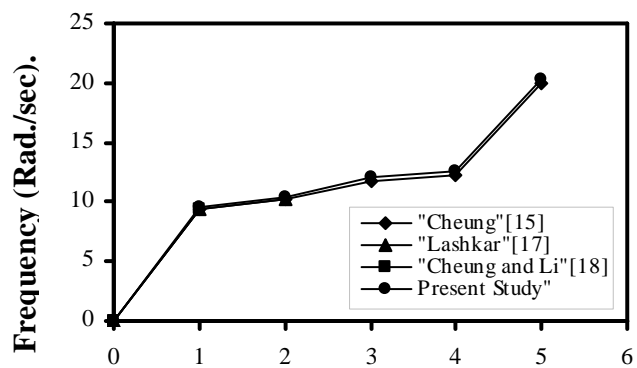


الشكل (4): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي للمعدد التوافقي الأول (Bridge-1)



Number of Mode

الشكل (7): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي للعدد التوافقي الرابع (Bridge-1)

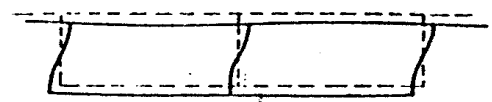
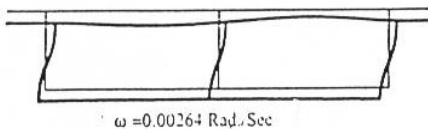


Number of Mode

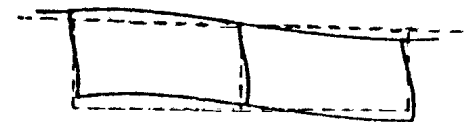
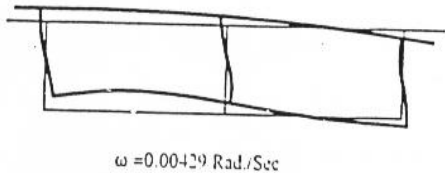
الشكل (6): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي للعدد التوافقي الثالث (Bridge-1)

Present Study

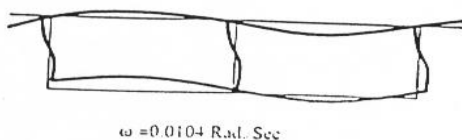
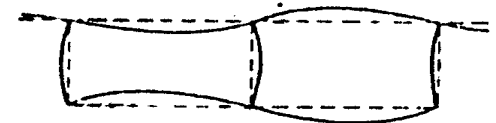
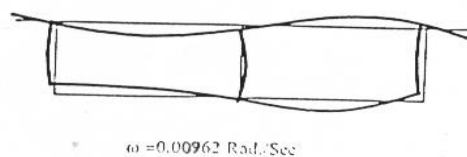
Cheung [15]



الشكل (8): نمط الشكل الأول للجسر الصندوقي للعدد التوافقي الأول (Bridge -1)



الشكل (9): نمط الشكل الثاني للجسر الصندوقي للعدد التوافقي الثاني (Bridge -1)

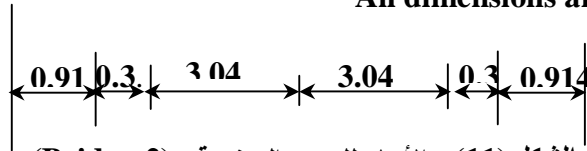
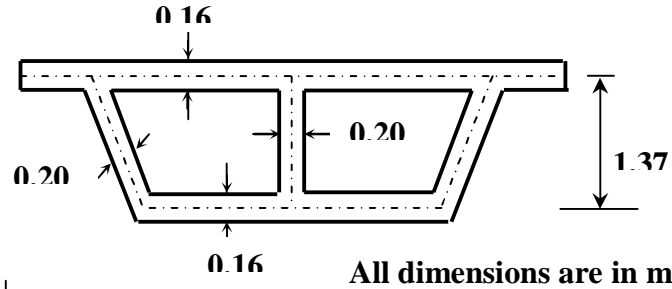


الشكل (10): نمط الشكل الأول والثاني للجسر الصندوقي للعدد التوافقي الثالث (Bridge -1)

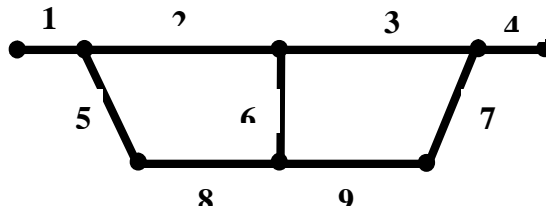
المثال الثاني: الاهتزاز الحر لجسر صندوقي منحني ذو خليتين ووترات مائلة (Bridge-2): تم اختيار مقطع صندوقي لجسر منحني بسيط الإسناد ذات وترات مائلة، سبق وان تم تحليله من قبل (Lashkari) [17]، في عام (1988) بطريقة الأجزاء المحددة.

كما قام (Cheung) and (Li) [18]، عام (1991) بتحليل الجسر نفسه بطريقة (Spline Finite Strip) بتقسيمه إلى (18) شريحة محددة ويوضح الشكل (11) تفاصيل الأبعاد للجسر الصندوقي الذي يمتلك الخصائص المادية الآتية: معامل المرونة ($2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$)، الكثافة الكتلية (2400 kg/m^3)، ونصف قطر (76.2 m)، ونسبة بواسون (0.15) وبزاوية (0.4 rad).

في الدراسة الحالية تم تحليل هذا النموذج بتقسيمه إلى (9) شرائح محددة ذات النسق العالي لتمثيل المقطع الصندوقي كما موضح في الشكل (12)، للحصول على قيم الترددات الطبيعية للعدد التوافقي الأول والثاني، ويوضح الجدول (2) قيم الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي المنحني للدراسة السابقة والحالية. ويبين الشكلان (13) و(14) مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها في الدراسة الحالية مع المصدر [18]، لقيم الترددات الطبيعية للعدد التوافقي الأول والثاني وباستخدام (9) شرائح محددة بينما في الدراسة السابقة [18] تم تقسيم نفس النموذج إلى (18) شريحة محددة فان النتائج التي تم التوصل إليها في الدراسة الحالية أعطت نتائج فرق بنسبة (6.73%) للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الأول وللنمط الثاني، كما أعطت الدراسة الحالية نتائج للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الثاني وللنمط الأول نسبة فرق بمقدار (3.76%) وهذا يعطي توافقية جيدة للنتائج، والشكل (15) يوضح مقارنة الشكل النمطي في المقطع العرضي للجسر عند منتصف الفضاء وللعدد التوافقي الأول من الترددات الطبيعية.



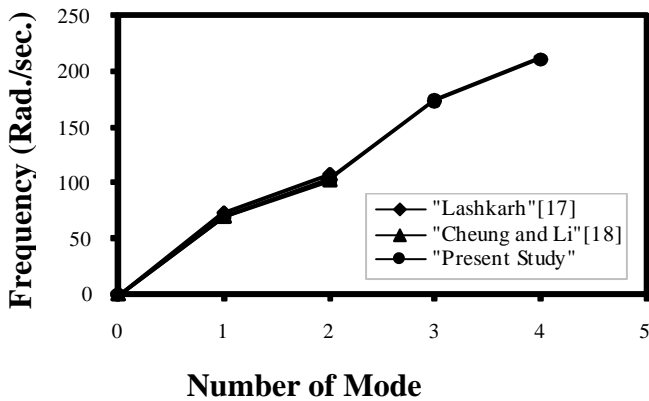
الشكل (11) : الأبعاد للجسر الصندوقي (Bridge-2)



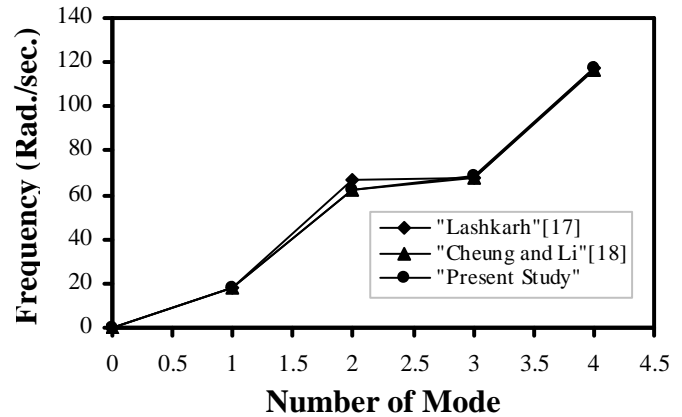
الشكل (12) : تقسيم مقطع الجسر الصندوقي (Bridge-2) إلى شرائح محددة

الجدول (2) يوضح قيم الترددات الطبيعية لجسر صندوقي منحني مؤلف من خليتين (Bridge-2)

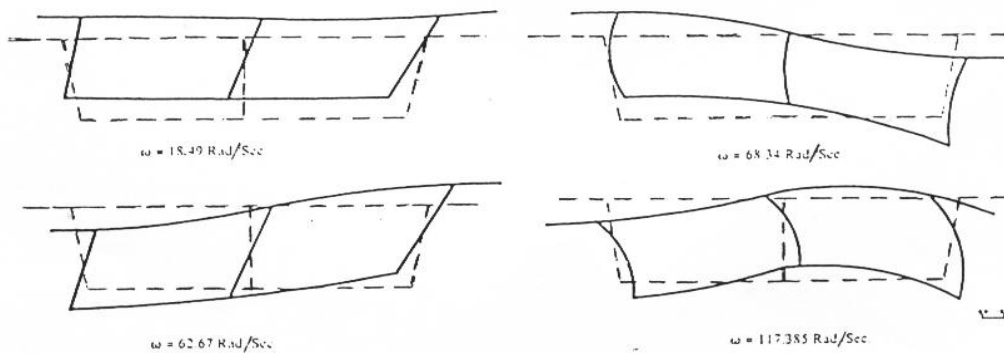
No. of Harmonic	Circular Frequency (Rad./sec.) $\times 10^{-3}$	Lashkari [17]	Cheung and Li [18]	Present Study
m=1	ω_1	18.307	18.405	18.468
	ω_2	67.198	62.343	62.67
	ω_3	67.565	67.831	68.34
	ω_4	117.22	116.58	117.38
m=2	ω_1	72.815	69.242	70.076
	ω_2	107.08	101.68	103.26
	ω_3			174.03
	ω_4			210.85



الشكل (14): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي (Bridge-2) للعدد التوافقي الثاني



الشكل (13): الترددات الطبيعية للجسر الصندوقي (Bridge-2) للعدد التوافقي الأول

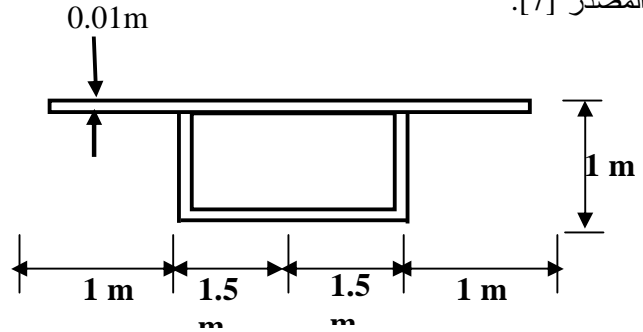
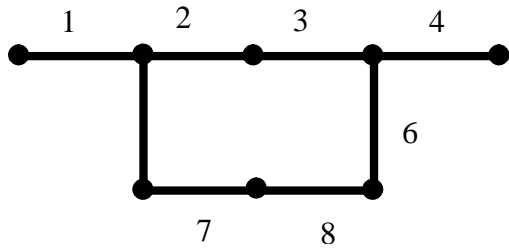


الشكل (15): نمط الشكل للجسر الصندوقي (Bridge-2) للعدد التوافقي الأول

المثال الثالث: الاهتزاز الحر لجسر صندوقي منحني يتألف من خلية واحدة (Bridge-3):

تم اختيار جسر منحنى ذو مقطع صندوقي مؤلف من خلية واحدة من قبل (Senthilvasan) وآخرون [7] عام (1997) باستخدام طريقة (Spline Finite Strip) بالإضافة إلى تطبيق برنامج (Super SAP) للحصول على قيم الترددات الطبيعية للجسر لتحليل الاهتزاز الحر، والشكل (16) يوضح الأبعاد للجسر الصندوقي ذو الخصائص المادية الآتية: معامل المرونة ($2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$) ، الكثافة الكتلية (2450 kg/m^3)، ونصف قطر (50 m)، ونسبة بواسون (0.3) وبزاوية (0.3 rad) . في الدراسة الحالية تم تحليل الجسر وذلك بتقسيم المقطع الصندوقي إلى ثمان شرائح محددة ذات النسق العالي والموضحة بالشكل (17).

يوضح الجدول (3) التوافق الجيد في قيم الترددات الطبيعية للدراسة الحالية والدراسة المقدمة من قبل المصدر [7].



الشكل (17): تقسيم المقطع الصندوقي (Bridge-3) إلى شرائح محددة

الشكل (16): الأبعاد للجسر الصندوقي (Bridge-3)

الجدول (3) يوضح قيم الترددات الطبيعية لجسر صندوقي منحني مؤلف من خلية واحدة (Bridge-3)

m=1	Circular Frequency (Hz)	Super SAP [7]	Senthilvasan [7]	Present Study
	ω_1	3.79	3.66	3.25
	ω_2	4.11	4.07	3.69
	ω_3	4.64	4.29	4.6
	ω_4	4.98	5	5.1
	ω_5	5.2	5.32	5.87

الاستنتاجات

اعتمد هذا البحث على تطبيق طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي مع تقنية الخط العنقدي المساعد لإجراء تحليل الاهتزاز الحر للجسور صندوقية منحنية، لما عرف عن هذه الطريقة من كفاءتها في التحليل السكوني للجسور حسب ما أظهرته البحوث السابقة.

بلورت تقنية تحليل الاهتزاز الحر للجسور باستخدام طريقة التعويض التكرارية (Supspace Iteration) لإيجاد قيم الترددات الطبيعية للجسر وبأعداد توافقية مختلفة لأهميتها البالغة لتقاضي حدوث أهم ظاهرة خطيرة للجسر وهي ظاهرة الرنين، فضلاً عن أهميتها في حساب مصفوفة الإخماد للجسر واستخدامها لإيجاد قيمة عامل الصدمة للجسر عند إجراء التحليل الديناميكي.

كما تم استخدام معادلات تكثيف كويان (Guyan Reduction) بكفاءة لمصفوفتي الجساءة والكتلة للجسر المطلوبة عند إجراء تحليل الاهتزاز الحر لاختزال درجة حرية الحركة للخط العنقدي المساعد ولغرض تحويل حجم المصفوفة إلى النسق الواطئ. ومن خلال مقارنة النتائج للبحث الحالي مع البحوث السابقة بينت أن طريقة الشريحة المحددة ذات النسق العالي تعطي نتائج دقيقة بدون زيادة عدد الشرائح أو التوافقية مقارنة مع طريقة الشريحة المحددة ذات النسق الواطئ، إذ وصلت نسبة الفرق ما بين الدراسة الحالية والسابقة إلى (6.73%) بالنسبة للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الأول لمقطع الجسر الصندوقي المؤلف من خليتين صندوقين ذات وترات مائلة، أما بالنسبة للتردد الطبيعي من العدد التوافقي الثاني فقد وصلت نسبة الفرق إلى (3.76%) للمقطع نفسه، كما تم التوصل على أوطأ تردد بالاعتماد على قيمة النمط الأول للاهتزاز من العدد التوافقي الأول.

1. Cheung, Y.K., "Orthotropic Right Bridges by The Finite Strip Method", *Concrete Bridge Design, ACI*, SP-26, 1971, PP.357-378.
2. Humar, J.L. and Kashif, A.M., "Dynamic Response of Bridges under Travelling Loads", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol.20, 1993, PP.287-298.
3. Komatsu, S. and Nakai, H., "Study of Free Vibration of Curved Girder Bridge" *Transactions of The Japan Society of Civil Engineers, Tokyo, Japan*, Vol.136, Dec. 1966.
4. Culver, C.G. and Oestel, D.J., "Natural Frequencies of Multispan Curved Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.10, No.3, 1969, PP. 380-389.
5. Sheikh, A.H. and Mukhopadhyay, M., "Free Vibration Analysis of Stiffened Plates with Arbitrary Planform by the General Spline Finite Strip Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol.162, No.1, 1993, PP.147-164.
6. Huang, D. and Member, P.E., "Dynamic Analysis of Steel Curved Box Girder Bridges", *Journal of Bridges Engineering*, Vol.6, No.6, Dec. 2001, PP.506-512.
7. Senthilvasan, J., Brameld, G.H. and Thambiratnam, D.P., "Bridge-Vehicle Interaction in Curved Box Girder Bridges", *Micro Computers in Civil Engineering*, Vol.12, 1997, PP.171-181
8. Abdul-Razzak, A.A., and Mohammad, A.A., "Dynamic Analysis of Box Girder Bridges Using Higher Order Finite Strip Method", *AL-Rafidain Engineering Journal*, Vol.10, No.1, 2005, PP.1-74.
9. Abdul-Razzak, A.A., "Finite Strip Analysis of Curved Box Girder", *AL-Rafidain Engineering Journal*, Vol.2, No.2, 1994, PP.122-142
10. Abdul-Razzak, A.A. and Najem, R.M., "Solution of Curved Box Girder Bridges with Intermediate Diaphragms", *AL-Rafidain Engineering Journal*, Vol.10, No.1, 2002, PP.1-22.
11. Abdul-Razzak, A.A. and Najem, R.M., "Solution of Curved Box Girder Bridges on Flexible Bent", *Scientific Journal of Tikrit University*, Vol.8, No.3, Sept. 2002, PP.38-54
12. Novozhilov, V.V., "*Theory of Thin Shells*", Second Edition, Groningen, P. Noordhoff, 1964.
13. Senthilvasan, J., Thambiratnam, D.P. and Brameld, G.H., "Dynamic Response of A Curved Bridge under Moving Truck Load", *Engineering Structures*, Vol.24, No.10, 2002, PP.1283-1293.
14. Cook, R.D., "*Concepts and Application of Finite Element Analysis*", John Wiley and Sons, Second Edition, 1981, PP.537.
15. Cheung, Y.K. and Cheung, M.S., "Free Vibration of Curved and Straight Beam-Slab or Box Girder Bridges", *Publications International Association for Bridge and Structural Engineering*, 32 –II, 41-52, 1972.
16. Cheung, Y.K., "*Finite Strip Method in Structural Analysis*", Pergamon Press, 1976, PP.232.
17. Lashkari, M., "COSMOS/M User Guide ", *Structural Research and Analysis Corporation, 1988*.
18. Cheung, Y.K. and Li, W.Y., "*Free Vibration Analysis of Longitudinal Arbitrarily Curved Box- Girder Structures by Spline Finite Strip Method*", Computational Mechanics Balkema, Rotterdam, 1991, PP.1139-1144.